数理解析研究所講究録
1109 巻 1999 年 163-173

シューア函数とアフィンリー環

北大・理 山田裕史
(Hiro-Fumi YAMADA)

§0 前口上

私の話と次の森田君の講演は本研究集会のメインテーマからは、はずれており所詮"色物"である。それならば、ということで今回の講演に際し髪の毛の色も変えてきた、といったことを講演の最初に(日本語で)申し上げたところ、最後列の某氏から「聞こえない」とお叱りを受けたのでここに再録した。タイトルはずいぶん大きく出たが、ここで扱うのは最も簡単なアフィンリー環である$A_1^{(1)}$型と呼ばれるものである。このリー環の"基本表現"を多項式環上に実現したときのウェイトベクトルがシューア函数を用いて表わされる、というストーリーである。"色物"にもかかわらず60分もの講演時間を下さり、また何人かの友人に再会する機会を与えて下さった研究代表者には深く感謝する。帰りの飛行機の都合で研究集会の最後まで出席できなかったのは残念であった。

§1 Virasoro 代数.

我々の舞台は無限変数の多項式環

$$V = V(x) = \mathbb{C}[x_j\ ;\ j \geq 1,\ odd\ ]$$

である。$\deg x_j = j$ と勘定して $V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$ と斉次成分に分解しておく。V_d の次元は d の奇数による分割の個数に等しい。V に作用する Virasoro 代数の話から始めよう。奇数 $j \geq 1$ に対して $a_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $a_{-j} = j x_j$ とおいて

$$L_k := \frac{1}{4} \sum_{j:odd} {:}a_{-j} a_{j+2k}{:} + \frac{1}{16} \delta_{k,0} \mathbb{1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\mathbb{1} = identity)$$

と定義する。ここで

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & (i \leq j) \\ a_j a_i & (i > j) \end{cases}$$

は物理で正規積と呼ばれるものである。このとき次の関係式が計算により示される：

$$L_k L_m - L_m L_k = (k-m) L_{k+m} + \frac{1}{12}(k^3 - k)\delta_{k+m,0} \mathbb{1}$$

つまり $\{L_k\}$ は Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ の central charge $= 1$ の表現を与えている。この"フォック表現"は既約ではない。既約分解のためには各既約成分の最高ウェイトベクトルを具体的に見つければよいのだが、それは次の微分方程式を解くことに他ならない： $L_k f = 0 \quad (\forall k \geq 1)$. このような

キは"特異ベクトル"と呼ばれる。以下のような事実が知られている [W]。

$$\{\text{斉次特異ベクトル}\} = \{S_{\Delta_r}(x)\ ;\ r \geq 0\}.$$

ここで $S_{\Delta_r}(x)$ は階段形分割 $\Delta_r = (r, r-1, \cdots, 2, 1)$ に対するシューアのS-函数，いわゆる"シューア函数"である。定義は以下のとおり。λ を自然数 n の分割とする。マス目の個数が $|\lambda| = n$ のヤング図形と言ってもよい。このとき，

$$S_\lambda(x) := \sum_\rho \chi_\rho^\lambda \frac{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots}{\nu_1!\,\nu_2! \cdots}$$

ここで和は n の分割 $\rho = (1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots)$ を渡る。χ_ρ^λ は対称群 S_n の λ に対応する既約表現の共役類 ρ における指標の値 $(\in \mathbb{Z})$ である。一般に $S_\lambda(x) \in \mathbb{C}[x_j\ ;\ j \geq 1]$ であるが，Δ_r は"2-core"であるため $S_{\Delta_r}(x) \in V$ となっている。上の事実より Virasoro 代数のフォック表現の既約分解がわかる：

$$V \cong \bigoplus_{r=0}^{\infty} M\left(\left(\frac{2r+1}{4}\right)^2, 1\right).$$

ここで一般に $M(h, c)$ は最高ウェイト $= h$，central charge $= c$ の Verma 加群である。（右辺の各 Verma 加群は既約である。）

<u>疑問</u>　この描象の"Jack 版"はあるのだろうか？

（cf [MY]）

§2 $A_1^{(1)}$型アフィンリー環

$A_1^{(1)}$（型アフィンリー環）とは，3次元のベクトル空間 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\alpha_0^\vee\oplus\mathbb{C}\alpha_1^\vee\oplus\mathbb{C}d_0$ と，e_0, e_1, f_0, f_1 で生成される無限次元のリー環である。$\mathfrak{h}$ の双対空間を $\mathfrak{h}^*=\mathbb{C}\alpha_0\oplus\mathbb{C}\alpha_1\oplus\mathbb{C}\Lambda_0$ とするとき，dual pairing は次で与えられる：$\langle d_0,\Lambda_0\rangle=0$,

$$(\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix},\quad \langle\alpha_i^\vee,\Lambda_0\rangle=\delta_{i0},\quad \langle d_0,\alpha_j\rangle=1.$$

$A_1^{(1)}$の"基本表現" $L(\Lambda_0)$ は $\Lambda_0\in\mathfrak{h}^*$ を最高ウェイトにもつ既約表現として定義される。一般に $\Lambda\in\mathfrak{h}^*$ が $L(\Lambda_0)$ の"ウェイト"であるとはウェイト空間

$$L(\Lambda_0)_\Lambda:=\{v\in L(\Lambda_0)\ ;\ hv=\langle\Lambda,h\rangle v,\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$$

が $\{0\}$ ではないこととして定義される。このとき次が知られている [K]：

$$\{L(\Lambda_0)\text{のウェイト}\}=\{\Lambda_0-p\delta+q\alpha_1\ ;\ p,q\in\mathbb{Z},\ p\geq q^2\}$$

ただし $\delta:=\alpha_0+\alpha_1$ は"基本虚ルート"と呼ばれるものである。$L(\Lambda_0)$ のウェイト Λ が"極大"であるとは $\Lambda+\delta$ がもはやウェイトでないこととして定義される。丁度，放物線 $p=q^2$ の上にあるウェイトのことである。極大ウェイトの全体は，最高ウェイト Λ_0 を通るワイル群の軌道になっている。

さて Lepowsky - Wilson による $L(\Lambda_0)$ の実現を紹介しよう。

不定元 p に対し,

$$Y(p) := -\frac{1}{2}\left\{ e^{2\xi(x,p)}\, e^{-2\xi(\tilde{\partial},\, p^{-1})} - 1 \right\}$$

とおき、$Y(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Y_k\, p^{-k}$ により斉次成分 Y_k を定義する。
ここで

$$\xi(x,p) = \sum_{j\geq 1,\, odd} x_j\, p^j \ , \quad \xi(\tilde{\partial}, p^{-1}) = \sum_{j\geq 1,\, odd} \frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial x_j}\, p^{-j}$$

とした。$Y(p)$ は "vertex operator" と呼ばれる。このとき,

$$\mathbb{C}\left\{ Y_k \ (k\in\mathbb{Z}),\ a_j \ (j\in\mathbb{Z}, odd),\ \mathbb{1} \right\}$$

は V に作用する無限次元リー環をなす。より正確には、これは $A_1^{(1)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の実現を与える。最高ウェイトベクトルは $\mathbb{1}\in V$ である [LW].

以上により Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ とアフィンリー環 $A_1^{(1)}$ が V に作用しているわけであるが, 両者の関係を述べておこう。
$\mathcal{L}$ のフォック表現は各 "string" $\{\Lambda - n\delta \,;\, n\geq 0\}$ (Λ は極大ウェイト) を不変にすることが検証される。しかも形式指標を見ることにより, 各 string は $\mathcal{L}$ で既約であることもわかる。すなわち, V の $\mathcal{L}$ による既約分解は, V を strings の和に分解することに他ならない。そして既約成分の最高ウェイトベクトルとしての特異ベクトル $S_{\Delta_r}(x)$ は $A_1^{(1)}$ の極大ウェイトベクトルのことである。極大とは限らない一般のウェイトベ

クトルもシューア函数を使って書けたらいいな，という希望が出てくるが、これについては[ANY]，[Y] に譲る。

§3 シューアのQ-函数

まず $D_2^{(2)}$ (型アフィンリー環）の基本表現を

$$V(t) = \mathbb{C}[t_j\ ;\ j \geq 1, \text{odd}]$$

上に実現しよう。 $a_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $a_{-j} = j t_j$ $(j \geq 1, \text{odd})$ として

$$Y(p) = \frac{1+i}{2(1-i)} \left\{ e^{\sum (1-i^j) t_j p^j} e^{-2\sum (1+i^j) \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial t_j} p^{-j}} - 1 \right\}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} Y_k p^{-k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

とおく。このとき

$$\mathbb{C}\left\{ Y_k\ (k \in \mathbb{Z}),\ a_j\ (j \in \mathbb{Z}, \text{odd}),\ \mathbb{1} \right\}$$

は $D_2^{(2)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の $V(t)$ 上の実現を与える。実は，リー環としては $D_2^{(2)} \cong A_1^{(1)}$ である。すなわち $A_1^{(1)}$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の §2 とは少し異なる実現が得られたのである。この実現ではウェイトベクトルは，今から定義する "シューアのQ-函数" により記述される。$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell) \in n$ の strict な分割としよう。すなわち $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_\ell > 0$.
シューアのQ-函数は

$$Q_\lambda(t) := \sum_\rho 2^{\left[\frac{\ell(\lambda)+\ell(\rho)+1}{2}\right]} \zeta_\rho^\lambda \, \frac{t_1^{\nu_1}\, t_3^{\nu_3} \cdots}{\nu_1!\, \nu_3! \cdots}$$

と定義される。ここで和は n の odd な分割 $\rho=(1^{\nu_1}3^{\nu_3}\cdots)$ を渡る。$\ell(\cdot)$ は分割の長さ，また ζ_ρ^λ は対称群 S_n の λ に対応する"スピン指標"の値である。対称群の2枚の被覆群 $\tilde{S}_n$ の"negative"な指標と言ってもよい。単に S_n のスピン指標というが，実際は符号などいろいろ面倒な約束が必要となるので，ここでは ζ_ρ^λ は Hoffman-Humphreys の本 [HH] に載っている指標表の値としておこう。ρ が odd な分割なので $Q_\lambda(t)$ は $V(t)$ に属する。

<u>定理</u>　$D_2^{(2)}$ の基本表現 $V(t)$ のウェイト基底として，
$\{ Q_\lambda(t)\ ;\ \lambda$ は strict な分割 $\}$ がとれる。

そこでウェイトの δ-移動と strict な分割との関係を，組合せ論的なゲームとして記述しよう。strict な分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell)$ に対する Q-函数 $Q_\lambda(t)$ の $D_2^{(2)}$ としてのウェイトを $wt(\lambda)$ と書くことにする。右のような"カレンダー"を描いて，数字 $\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell$ のところを○でかこみ，これを"石"と呼ぶ。右の例では $\lambda=(9,7,4,3)$.

	1	3
2		
4	5	7
6		
8	9	11
:	:	:

このとき $wt(\lambda)+\delta$ をウェイトにもつ strict な分割 μ
（正確には $Q_\mu(t)$ がウェイト $wt(\lambda)+\delta$ をもつような μ）は
次の手続きのどちらかで得られる：

(1) 一番左の列（偶数の列）の石を1マス上げる。

(2) 位置2にある石を取り去る。

また $wt(\lambda)+2\delta$ を得る方法は次のどれか：

(3) (1),(2) を2度続ける（これはアタリマエ！）

(4) 1の列あるいは3の列の石を1マス上げる。

(5) 位置1と3にある石を同時に取り去る。

もちろん strict な分割を表わす絵なので石は重なってはいけない。(1)〜(5) の操作をくり返し行うと有限回で"手づまり"に達する。その手づまりが $D_2^{(2)}$ の極大ウェイトを与えるわけである。具体的には，手づまりは

$$HC := \{\phi,\ (4n+1, 4n-3, \cdots, 5, 1),\ (4n+3, 4n-1, \cdots, 7, 3)\ (n\geq 0)\}$$

で与えられることがすぐにわかる。先程の例 $\lambda=(9,7,4,3)$ では手づまりは (3) であり，$wt(\lambda)=wt((3))-10\delta$ であることが見てとれる。簡単のため HC の strict な分割に

$L_n=(4n+1, 4n-3, \cdots, 5, 1)$，$R_n=(4n+3, 4n-1, \cdots, 7, 3)$

と名前をつけておこう。

§4 変数変換.

ここまで $A_1^{(1)} \cong D_2^{(2)}$ の基本表現の V 上の2つの実現を問題にしてきた。復習すると.

$$A_1^{(1)} \curvearrowright V(x) \quad (\S 2), \quad D_2^{(2)} \curvearrowright V(t) \quad (\S 3).$$

ソリトン方程式との関係で、私は前者を"KdV picture"、後者を"BKP picture"(正確には 4-reduction of BKP)と呼んでいる。両者は非常に簡単な変数変換で結びついている。

$$\varpi : V(t) \longrightarrow V(x) \quad \text{algebra isomorphism}$$

$$t_j \longmapsto \left(\cos \frac{j\pi}{4}\right)^{-1} x_j \qquad (j \geq 1, \text{odd})$$

この変数変換で両者の vertex operator が定数倍を除いて一致することが示される。特に BKP picture の極大ウェイトベクトルは ϖ により KdV picture のそれに定数倍を除いて一致する。(極大ウェイト空間は1次元である)これを具体的に見ていこう。BKP picture の極大ウェイトベクトルは集合 HC で与えられた。ここで

$$|L_n| = \frac{1}{2}(2n+1)(2n+2) = |\Delta_{2n+1}|, \quad |R_n| = \frac{1}{2}(2n+2)(2n+3) = |\Delta_{2n+2}|$$

に注意する。一般に strict な分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ に対して、その"doubling"を,

$$\mathrm{dbl}(\lambda) = \left(\left[\frac{\lambda_1+1}{2}\right], \left[\frac{\lambda_1}{2}\right], \left[\frac{\lambda_2+1}{2}\right], \left[\frac{\lambda_2}{2}\right], \cdots, \left[\frac{\lambda_\ell+1}{2}\right], \left[\frac{\lambda_\ell}{2}\right]\right)$$

により定義すると $\mathrm{dbl}(L_n) = \Delta_{2n+1}$, $\mathrm{dbl}(R_n) = \Delta_{2n+2}$ となる。変数変換 ϖ は多項式の次数を変えないので，上のことより，$n \geq 0$ に対して，

$$\varpi(Q_{L_n}) = (\mathrm{const})\, S_{\Delta_{2n+1}}, \quad \varpi(Q_{R_n}) = (\mathrm{const})\, S_{\Delta_{2n+2}}$$

がわかる。右辺の定数はアフィンリー環の表現論的な立場からは計算できないし，また必要もないものだが，対称群とその被覆群のモジュラー表現の結果を援用することにより，特定できる［NY］。

定理
$$\begin{cases} \varpi(Q_{L_n}) = 2^{\frac{n+1}{2}} S_{\Delta_{2n+1}} \\ \varpi(Q_{R_n}) = 2^{\frac{n+1}{2}} S_{\Delta_{2n+2}} \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

基本表現とシューア函数の話はもう何年も続けており，いつも“そろそろ止めよう”と思っている。ところが決心しようとするとおもしろい側面が見えてくる，ということがくり返されて，不適切な関係は断ち切れないでいる。もうしばらくつき合うことになるのだろうか。

——— 某氏は眠ってしまった...

文献

[ANY] S. Ariki, T. Nakajima and H. -F. Yamada: Reduced Schur functions and the Littlewood-Richardson coefficients, J. London Math. Soc. (to appear)

[HH] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys: Projective Representations of the Symmetric Groups, Oxford, 1992

[K] V. G. Kac: Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd. ed., Cambridge, 1990

[LW] J. Lepowsky and R. L. Wilson: Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Comm. Math. Phys. **62** (1978), 43-53

[MY] K. Mimachi and Y. Yamada: Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials, Comm. Math. Phys. **174** (1995), 447-455

[NY] T. Nakajima and H. -F. Yamada: Schur's Q-functions and twisted affine Lie algebras, preprint, 1998

[W] M. Wakimoto: Basic representations of extended affine Lie algebras, 数理研講究録 **503** (1983), 36-46

[Y] 山田裕史: 基本表現のウエイトベクトルとシューア函数, 第１２回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (1996), 130-149

1999年 2月21日.